L. Khnisse | A.S :2011/2012

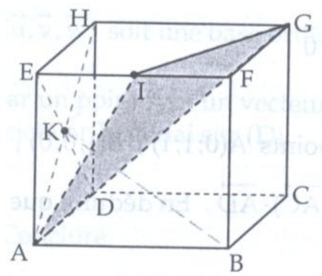
Devoir de synthèse N°2

Classes $4^{ème}$ sc

Rattrapage | Durée: 2.h

Exercice N°1: (3 pts)

ABCDEFCH est un cube de côté 1. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



I est le milieu de [EF] et K est le centre du carré ADHE.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle IGA.
2) a) Calculer le volume du tétraèdre BIGA.
   b) En déduire la distance du point B au plan (IGA).
3) Donner une équation du plan (IGA)

Exercice N°2 : (5pts)

I-

Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left(\ \|\vec{i}\|=4cm\right)$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement les résultats obtenus
2/ Dresser le tableau de variation de f
3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0
4/ Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$
  a) Etudier les variations de g
  b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que : $0,4<\alpha<0,5$
5/ Construire T et C

II -
1/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J dont on précisera
2/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$ (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)
3)a) Donner le tableau de variation de $f^{-1}(x)$
  b) Donner une équation de la tangente T' à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$
  c) Construire T' et $C_{f^{-1}}$ dans le repère R

Exercice N°3 : (6 pts)

I/

Soit $f : IR \rightarrow IR$

$$x \mapsto \begin{cases} xe^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $R\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

1/ Montrer que f est continue en 0

2/ Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3/ Etudier les branches infinies de Γ au $V(+\infty)$ et $V(-\infty)$

4/ Dresser le tableau de variation de f

5/a) Calculer f(1) et f(e)

b) Tracer Γ

II/

Soit $g : IR \rightarrow IR$

$$x \mapsto \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que g est impaire.

2/ Donner le tableau de variation de g

3/ Tracer ζ_g dans le même repère. (ζ_g étant la courbe représentative de g).

Exercice N°4 : (6 pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $S(1,1,2), A(-3,0,0)$, $B(1,0,-2)$ et $C(-1,1,0)$

1/ Montrer que les points A,B et C déterminent un plan P d'équation $x-2y+2z+3=0$

2/ Soit Q l'ensemble des points M de ξ vérifiant $(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BS}).\overrightarrow{SM}=0$

a) Montrer que Q est un plan dont on donnera une équation cartésienne

b) Montrer que P coupe Q suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique

c) Calculer la distance du point A à la droite Δ

3/a) Vérifier que SABC est un tétraèdre puis calculer son volume V

b) Calculer l'aire du triangle SAC puis déduire la distance du point B au plan (SAC)

4/ Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0$

a) Montrer que (Γ) est une sphère dont on précisera le rayon R et le centre I

b) Montrer que (Γ) est la sphère circonscrite au tétraèdre SABC

Montrer que P coupe (Γ) suivant un cercle que l'on caractérisera